

流固场耦合作用下城市建筑群的风环境-结构形态拓扑优化初探

严鑫^{1,*}, 鲍鼎文², 熊昱麟³

¹北京建筑大学, 建筑与城市规划学院

²澳大利亚 RMIT 皇家墨尔本理工大学, 建筑与城市设计学院

³澳大利亚 RMIT 皇家墨尔本理工大学, 创新结构与材料中心

摘要:

在单体建筑的计算性设计中, 建筑师凭借结构拓扑优化、图解静力学等方法对单体建筑静力学性能进行优化找形。然而, 这些方法在更大尺度的建筑群或城市街区形态优化中却难以发挥作用。一方面, 城市建筑群的形态优化与建筑环境性能更为相关; 另一方面, 上述方法中流场计算的缺失使得建筑在计算优化时被迫简化为理想的孤岛, 以往研究难以对相邻建筑物之间复杂的对流作用进行分析。本研究将流固耦合技术与拓扑算法相结合, 实现了对城市街区建筑群实体与环境流场的协同计算, 以期将建筑的力学性能与风环境性能等量化指标结合起来驱动城市建筑群形态拓扑优化计算。

关键词: 建筑群; 拓扑优化; 建筑形态; 计算设计; 流固耦合

Keywords: Building Group; Topology Optimization; Architectural Form; Computational Design; Fluid Structure Interaction

引言

近几年来, 越来越多的数字辅助设计工具为建筑师和工程师提供了快速分析建筑形态方案在力、热、风、光、声等物理性能的机会, 建筑设计也逐步走进了数字性能化时代。然而, 与生成式设计“从无到有”的形态创作不同, 建筑的物理场性能分析需要依托于已有的建筑形态模型。在模拟计算中, 建筑物形态与周边的物理场形态是相互影响的补形关系, 建筑物的形态变化将对物理场的形态及其性能分布带来巨大改变, 二者之间复杂的耦合关系既决定了算法难以创造性地“凭空”生成方案, 也限制了对于城市高层建筑群落之间“建筑—环境”相互作用的精确描述。

本文试图将流固耦合技术 (Fluid Structure Interaction, FSI) 与建筑拓扑优化方法结合起来, 形成了流固体场耦合作用的城市建筑群拓扑优化算法框架, 借助此框架可以模拟分析城市高层建筑群及其周边环境性能之间复杂耦合作用来协同优化建筑形态与周边环境性能。得益于加入环境流场模型, 本研究将建筑群纳入到建筑形态优化计算中, 从而助力城市高密度街区中建筑更新与新建工作中的智能化设计决策。限于篇幅原因, 后文将以城市风环境性能 (流体场) 与建筑结构性能

¹ 严鑫 (✉), 北京建筑大学建筑与城市规划学院, 讲师, yanxin@bucea.edu.cn

² 鲍鼎文, 澳大利亚 RMIT 皇家墨尔本理工大学建筑与城市设计学院, 高级讲师, nic.bao@rmit.edu.au

³ 熊昱麟, 澳大利亚 RMIT 皇家墨尔本理工大学创新结构与材料中心, 博士后研究员, yulin.xiong@rmit.edu.au

（固体场）的耦合作用驱动建筑群形态拓扑优化为例进行分析阐释，但需说明本文所提出之计算框架适用于如“力、声、热、风”等所有流固体耦合作用的建筑群形态优化设计。

1 不同性能主导的计算性建筑形态优化设计研究

1.1 结构性能驱动的建筑生成设计

结构作为建筑中对形态影响最为显著的一个方面，其找形方法很久以来都受到了建筑师和结构师们的广泛关注。1875年，瑞士学者卡尔·库尔曼通过图解的方式定性分析结构受力的结构找形方法。直至今日，借助于计算机技术开发的力密度法^[1]、动态松弛法^[2]、推力网格法^[3]以及三维图解静力学^[4]等方法依然被许多建筑师应用于建筑设计。

近三十年来，越来越多的学者开始关注基于有限元分析（Finite Element Analysis, FEA）的定量结构找形算法。相较于图解方法，这种基于数据的方法不仅可以考虑真实材料的耐受与破坏特性以及更多的结构连接关系，还更加便于突破既有的结构体系束缚，找到适合于某种特定情形的新型的高效结构方式。其中，结构拓扑优化经过多年的发展，已经逐步形成了诸多不同算法，如均匀化方法^[5]、变密度法^[6]、双向渐进结构优化法^[7]等。相较于其他算法，拓扑优化可以深度发掘结构内部高效的连接方式，从而带来形态优美、性能高效的建筑形态。目前，结构拓扑优化算法已经在建筑形态设计^[8-11]等诸多领域发挥了重要作用。

1.2 环境性能驱动的建筑形态优化

建筑的外部环境是一个无形且多变的场域，但该场域中风舒适性、热舒适性等物理性能又在极大程度上影响着人们使用建筑空间时的感受。在环境性能驱动建筑形态优化方面，计算流体力学（Computational Fluid Dynamics, CFD）成为了建筑设计常用的分析工具。不同学者就此开展了研究，如将风环境分析技术和低速风洞实验平台结合起来进行建筑风环境模拟与形态优化^[12,13]，将CFD技术与参数化建模工具、机器学习和其他数字技术相结合，开发了以风环境、热环境为核心的建筑表皮设计方法^[14-16]。

然而，受限于仿真技术的复杂原理，现有研究大多围绕某单一性能进行单体建筑形态设计研究，而对多物理性能耦合作用以及多建筑体相互作用等实际语境关注不足。同时，多数环境性能驱动设计的研究形态修改逻辑相对比较简单，如立面窗口的尺寸、建筑形体的扭转、建筑楼层的架空、建筑表皮形态起伏等，理论上难以突破原有形态框架，生成新颖的多样性建筑形态设计。因此，团队曾在2022年开发了一个简易的“建筑—环境”性能驱动形态进化工作循环^[17]，但它需要在不同平台之间手动传输数据，但事实证明手动流程和粗糙的计算模型效率低下且不精确。这些固有的局限性阻碍了它们在实际建筑设计中的应用。在该研究基础上，本文结合计算机图形学网格剖分技术和Abaqus流固耦合计算方法提出了一种流固场耦合作用的建筑群形态拓扑优化算法，以期对相关研究提供一条新的思路。

2 多场耦合作用的建筑群形态拓扑优化方法

2.1 算法框架

本研究将流固耦合技术与建筑形态拓扑优化方法结合起来，实现了城市街区组团中多建筑实体（固体场）形态与周边风环境（流体场）形态的协同优化，其中涉及固体场域模拟的有限元分析、流体场域的计算流体力学以及复杂形态的计算网格自动剖分算法三个主要部分。本研究算法逻辑如图1所示。建筑环境性能涉及风、热、声、光等诸多方面，这些环境性能都能够通过计算

流体力学进行模拟分析，因此都可以纳入到本算法之中。限于文章篇幅，本文后续内容以建筑风环境的风速与结构荷载优化为例讨论“建筑—环境”耦合作用进行探究。

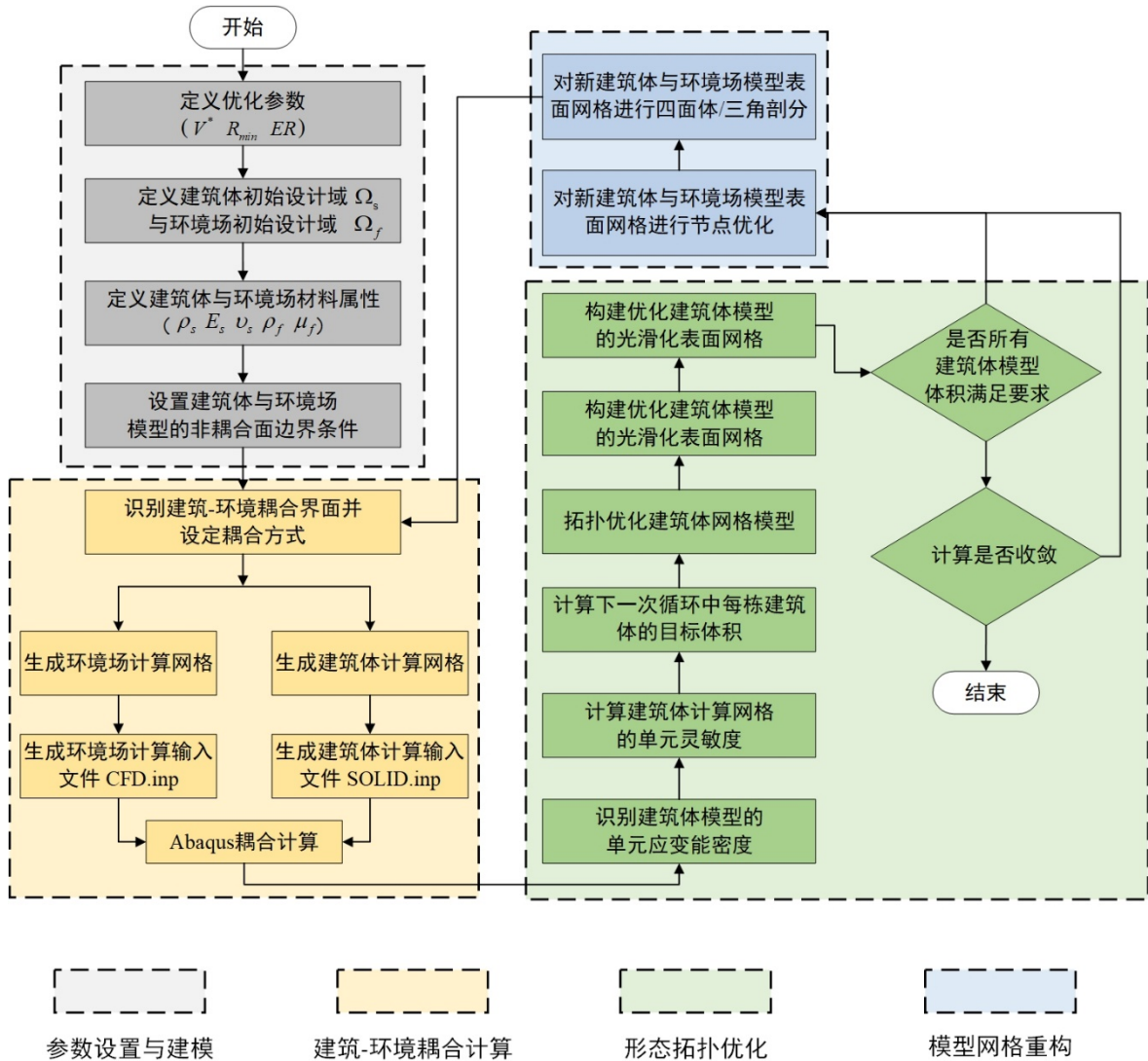


图1 算法流程图 (图片来源: 作者自绘)

2.2 参数设置与建模

此部分定义了计算中不会随模型形态变化而变化的重要参数。物质层面，包括流固耦合仿真计算所需的建筑实体模型和风环境流场相关的属性参数。其中建筑实体设计范围 Ω_s 的材料属性有密度 ρ_s 、弹性模量 E_s 以及泊松比 ν_s (本文算例均假设为钢材, $\rho_s = 7.8 t/m^3$, $E_s = 210 GPa$, $\nu_s = 0.3$)；环境流场 Ω_f 的材料属性密度 ρ_f 以及动力学粘度系数 μ_f (本文中环境介质为空气, $\rho_f = 1.29 kg/m^3$ 且 $\mu_f = 1.79 \times 10^{-5} Pa \cdot s$)。

拓扑优化参数层面，包括每栋建筑的目标体积 V_k^* ，建筑实体单元的过滤半径 R_{min} ，以及进化率 ER ，这三个参数分别影响着建筑立面最后的窗墙比、实体构件的尺寸以及优化算法的速度和精度 (本文取值为 $V_k^* = 50\%$, $R_{min} = 1.2m$, $ER = 2\%$)。

在计算过程中，建筑实体模型和环境流场模型的变化只会对二者接触的表面 (接触面) 产生影响，这两个模型在其他位置的边界条件设定是不会改变的。因此，这部分的参数设置也可以在程序循环之前定义，它包括：建筑实体与地面的固定的位置 Γ_s 及其约束方式 (本文中设定建筑的底

边固定在地面上），环境流场中介质（空气）入口边界 Γ_{in} 的水平风速 v_{in} 以及出口边界 Γ_{out} 的压强 p_{out} 等（在本文算例中取 $v_{in} = 20 \text{ m/s}$ ， $p_{out} = 0 \text{ Pa}$ ）。

2.3 “建筑—环境”耦合计算

在分析建筑实体与环境流场的交互作用时，我们使用了流固耦合技术来进行分析。流固耦合是指流体（液体或气体）与浸入其中或与流体相互作用的结构（固体）之间复杂的相互作用。过程中，建筑实体模型的变形会影响周围空气流体的流动，而反过来，空气又会对建筑表面施加荷载。这些复杂的计算需要大量的模拟和时间，本研究引入了 Abaqus 2016 来有效地进行流固耦合计算。

在 Abaqus 2016 中，流固耦合协同模拟基于两个独立的求解模块进行，即 CFD 求解器和标准/显式求解器。计算核心分别将环境场网格模型和建筑实体网格模型与前一步中各自的属性参数和边界条件相结合，生成两个不同的输入文件 CFD.inp 与 SOLID.inp。这两个文件也是算法执行时与 Abaqus 软件之间的基本数据交换载体，他们包含了耦合计算所需的所有数据，包括网格信息、边界条件、材料假设、分析设置、输出记录要求等。其中，两个模型相接的边界 Γ^* 是建筑与环境进行数据交换计算的重要载体，它的形态会随着优化的进行而变化，因此利用算法准确识别建筑与环境的接触面是决定耦合计算能否成功的关键。

2.4 形态拓扑优化

通过建筑—环境耦合计算分析，程序能够分析这种复杂作用下的建筑实体和环境流场的物理状态。本研究结合团队过去研究中研发的多体积约束的双向渐进结构优化方法^[9]，可以对每栋建筑分别进行拓扑优化找形。根据该理论，结构性能优化下的多个建筑体可以在多局部体积的约束下分别独立地进行形态的拓扑优化，其优化问题描述为：

$$\begin{aligned} \min C_k(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_k} x_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i \\ \text{subject to } V_k(\mathbf{X}_k) &= \sum_{i=1}^{N_k} x_i v_i \leq V_k^* \end{aligned} \quad (1)$$

其中 C_k , \mathbf{X} , \mathbf{U} , \mathbf{K} 分别是第 k 栋建筑的目标函数（柔度），设计变量矩阵，位移矩阵以及全局刚度矩阵。 V_k^* , \mathbf{X}_k 和 N_k 是分别是对应第 k 栋建筑的目标体积、局部设计变量向量和局部单元数量。 v_i , x_i , k_i 和 \mathbf{u}_i 是第 i 个网格单元的体积、设计变量（伪密度）、刚度矩阵和节点位移矢量。而建筑体网格单元对整体性能作用大小的表征指标为单元灵敏度数值 α_i ，它可以通过耦合分析中输出的建筑体单元应变能密度求得，即：

$$\alpha_i = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i & \text{when } x_i = 1 \\ 0 & \text{when } x_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

与传统的结构静力学分析不同，“建筑—环境”耦合分析是动态分析，其结果需要在一段时间内进行综合考量，因此需要对上述单元灵敏度进行修正。假设每次迭代的动态分析时间总长度为 T ，本文将均等地抽取 M 个时间节点的每个单元灵敏度 $\alpha_i^{[j]}$ 进行加和，得到整段时域下的单元灵敏度 $\hat{\alpha}_i$ ，

$$\hat{\alpha}_i = \sum_{j=1}^M \alpha_i^{[j]} \quad (3)$$

通过过滤半径 R_{\min} 处理的过滤单元灵敏度则保证了模型进化过程中的稳定性[18], 同时还可以间接控制形态构建的尺寸[19],

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^N w_{ij} \hat{\alpha}_j}{\sum_{j=1}^N w_{ij}} \quad (4)$$

$$w_{ij} = \max(0, R_{\min} - d_{ij})$$

其中 w_{ij} 是过滤权重因子, d_{ij} 是建筑网格单元 i 与 j 中心点之间的距离。在每次优化时, 算法根据单元灵敏度数值大小对建筑体网格单元进行判定, 灵敏度小的被移除, 灵敏度大的被保留进下一次迭代。在这个过程中, 建筑体量体积变化的程度由进化率 ER 控制:

$$V_k^{(n)} = V_k^{(n-1)}(1 \pm ER) \quad (5)$$

其中, $V_k^{(n)}$ 和 $V_k^{(n-1)}$ 分别是第 n 次迭代和第 $n-1$ 次迭代中建筑 k 的体积。而整体迭代进化过程会持续进行, 直到所有建筑的体积满足要求且所有建筑体的整体性能符合收敛标准:

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^N (C_{k-i+1} - C_{k-N-i+1})}{\sum_{i=1}^N C_{k-i+1}} \right| \leq \tau \quad (6)$$

其中 k 是当前的迭代次数, τ 是收敛容差 (本文取值 0.01)。

2.5 模型网格重构

在迭代过程中, 移除或添加建筑形态单元后的模型表面往往会出现许多尖锐的不规则点。这些形态上的缺陷不仅影响美观和制造复杂性, 还会阻碍周围流体的流动。因此, 在每次迭代计算中, 程序都需要对优化后的建筑实体网格都需要进行网格重构工作 (图 2)。该部分主要分为三个步骤:

(1) 网格表面的光顺化: 为了解决拓扑优化带来的表面粗糙问题, 算法引入了泊松重建光顺算法^[20]来进一步对优化后的建筑网格模型进行表面优化, 而与之对应的环境流场的表面网格也同步生成;

(2) 网格表面节点平均: 在本算法中, 重建后的表面网格中常见的非均匀分布的网格节点会在后续三维网格剖分时造成局部节点歧异或单元过于狭长而品质不高的问题。因此, 在得到光顺的表面网格之后, 我们需要利用迭代程序对表面网格上的节点进行微调, 去除临近的节点, 同时在距离较远的节点之间添加新的节点, 确保建筑与环境接触面网格分布的均匀和精确;

(3) 三维网格剖分: 最后, 通过德劳内剖分算法快速地为更新后的建筑实体模型和环境流场模型的封闭表面网格内部填充可供后续计算的三维网格。

建筑与环境模型的网格重构是每次进化迭代都要自动重新运算, 在此之后, 程序将生成新的计算文件 `CFD.inp` 和 `SOLID.inp`, 并进入下一次循环。

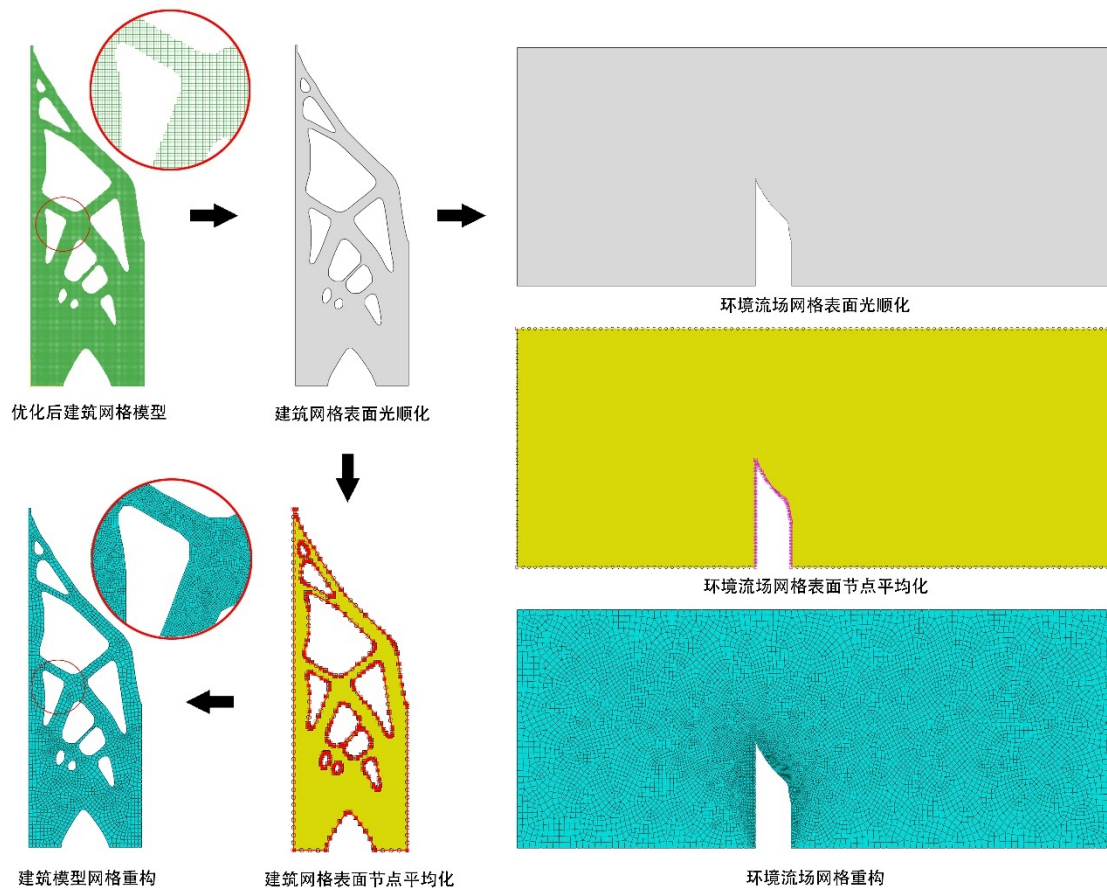


图2 建筑体与环境场模型网格计算重构过程图示（图片来源：作者自绘）

3 算例分析

3.1 单体高层建筑的立面拓扑优化

本例通过单栋高层建筑在风场环境中的找形过程展示本研究相较于传统结构拓扑优化算法的区别和优势。如图 3 所示，在传统只有建筑体参与计算的拓扑优化方法中，由于缺失环境流场模型，8 级水平风荷载（风速为 20 米/秒）必须需要被简化为水平向的压强荷载（ $P = 260Pa$ ），并且不能考虑空气复杂流动对建筑带来的影响。同时，建筑模型的左侧边界必须设置为不能被改变的非设计区以抵抗这些水平荷载。这些都限制了建筑外形设计的范围，也与真实的城市场景不符。

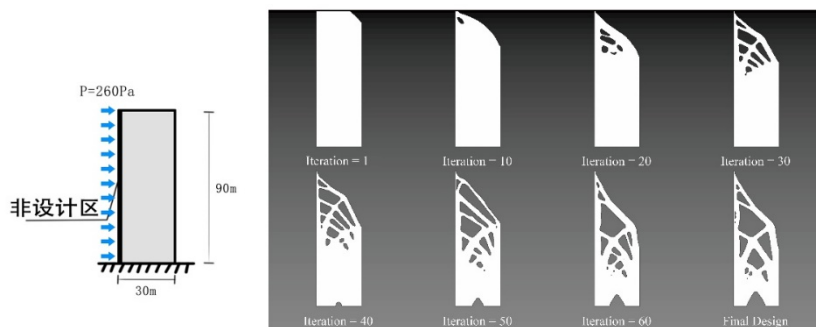


图3 传统建筑拓扑优化方法边界条件与优化过程（图片来源：作者自绘）

然而，使用流固场耦合的建筑形态拓扑优化方法，附加的环境流场模型可以定义为不可压缩的纳维斯托克斯模型，初始风速可以直接定义在左侧入口边界上，而空气在运动过程中的复杂效应完全可以由流场的模拟计算求解出来。图 4 展示了本算法不同阶段的建筑形态变化。

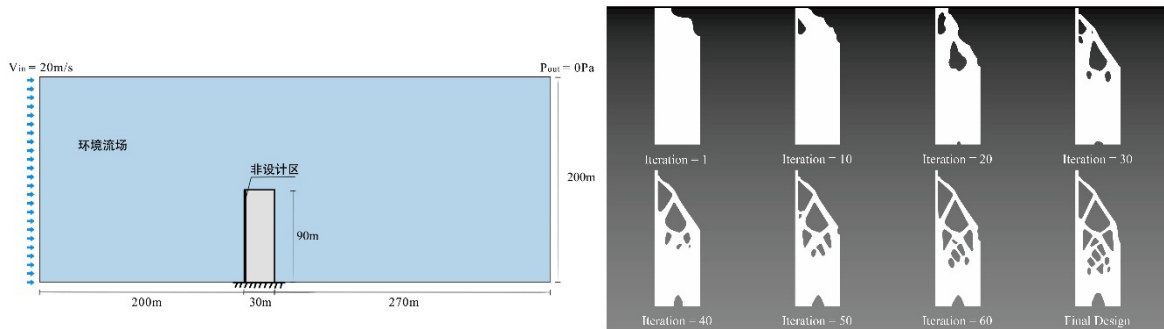


图 4 流固场耦合作用的建筑形态拓扑优化方法边界条件与优化过程（图片来源：作者自绘）

若将图 3 中传统拓扑优化方法得到的结果放置于同样的流场环境下进行建筑-环境模拟，可以得到如图 5 所示的结果。对比图 5-6 可以看出，在相同的流场条件下，10s 过程内的动力学耦合分析显示传统方法得到的优化形态建筑内部的最大应力为 $0.514MPa$ ，风场中最高风速为 $135m/s$ ，而本算法的建筑最大应力为 $0.307MPa$ ，最高风速为 $130m/s$ 。这意味着本算法可以在风环境模拟中生成更精确、更合理的建筑形态，既降低建筑自身的结构内应力水平，同时使得周边风场的风速有所降低。

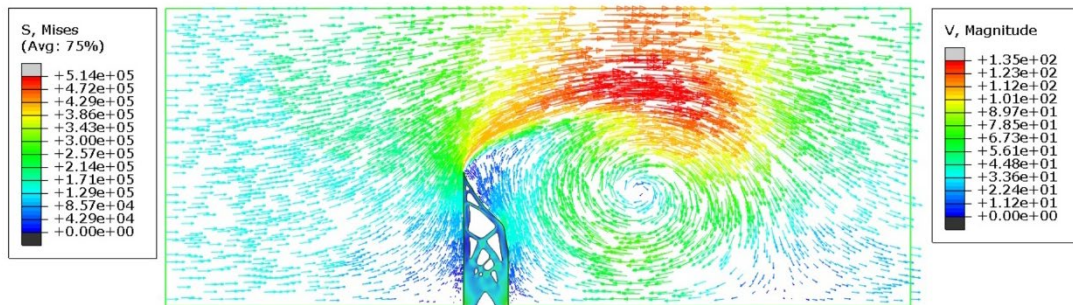


图 5 传统建筑拓扑优化形态的耦合分析结果（图片来源：作者自绘）

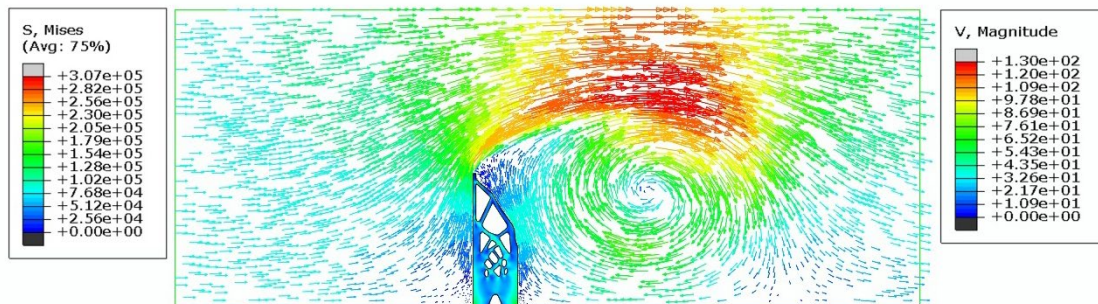


图 6 流固场耦合作用下建筑拓扑优化形态的耦合分析结果（图片来源：作者自绘）

3.2 高层建筑群的立面协同优化

本研究算法相较于普通结构优化找形算法的另一个重要优势在于它在城市建筑群找形中发挥的巨大作用。由于传统的建筑拓扑优化方法中没有考虑环境流场，建筑与建筑之间被看作独立的孤岛，它们之间难以进行有效的信息传递，计算机也不能分析风场在相邻建筑之间的复杂流动。而

本算法借助于环境流场模型，实现了建筑群落中建筑物之间的信息传递，从而实现了多建筑物形态的协同优化，有效地解决了城市建筑群的设计问题。

在本例中，我们延续了同样的流场条件设置，不同的是在同一流场中布置了距离不等的三栋同等尺寸的高层建筑。为确保建筑物在优化过程中能够保持基本的高度形态，本算例分别尝试在每栋建筑左侧边界或建筑中线上部设置非设计区（图 7-8）。如图 9-10 所示，由于流场的复杂作用，三栋建筑的形态优化过程中呈现出不同的样貌。在图 10 中，三栋建筑的迎风边界都产生了不同程度的改变，由于与之几何互补的环境流场存在保证了计算的稳定性，这是以往没有流场参与计算的优化算法不能实现的。

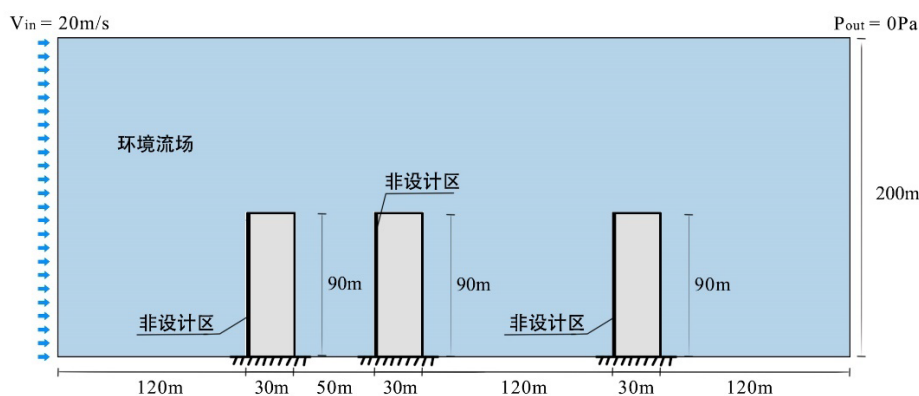


图 7 左侧边界非设计区算例边界条件设置图示

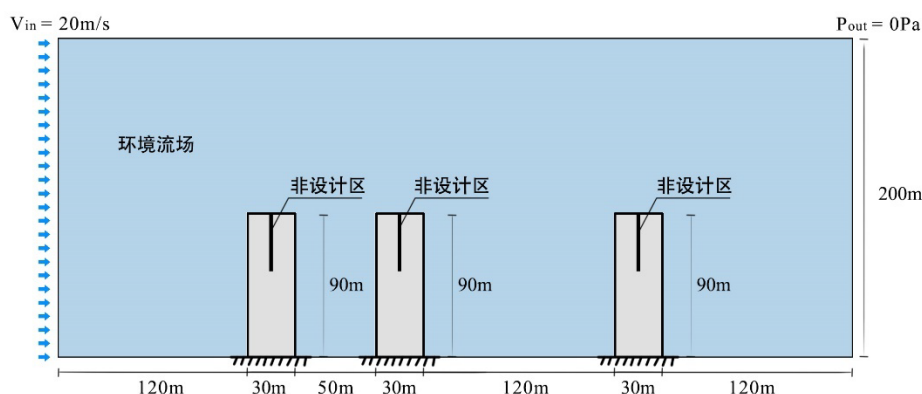


图 8 中央非设计区算例边界条件设置图示

图 11 展示了两个算例的最终优化结果在总时长为 10s 的流固耦合动力学模拟仿真中的典型结果。在这次模拟中，10s 的动态模拟共输出了 200 帧图片，图 11 分别展示了第 50 帧、100 帧、150 帧和 200 帧的建筑应力分析与风环境风速分析结果。在整个动态过程中，三栋建筑的受力是不同步的，他们分别在不同帧时达到了应力最大状态。同时，相邻的建筑之间会产生涡流效应，对建筑体的受力产生影响。而通过对比第 150 帧和第 200 帧的结果，可以看到中央非设计区的结果可以有效地减弱临近两栋建筑之间的空气涡流，从而带来更好的建筑结构性和风环境性能。

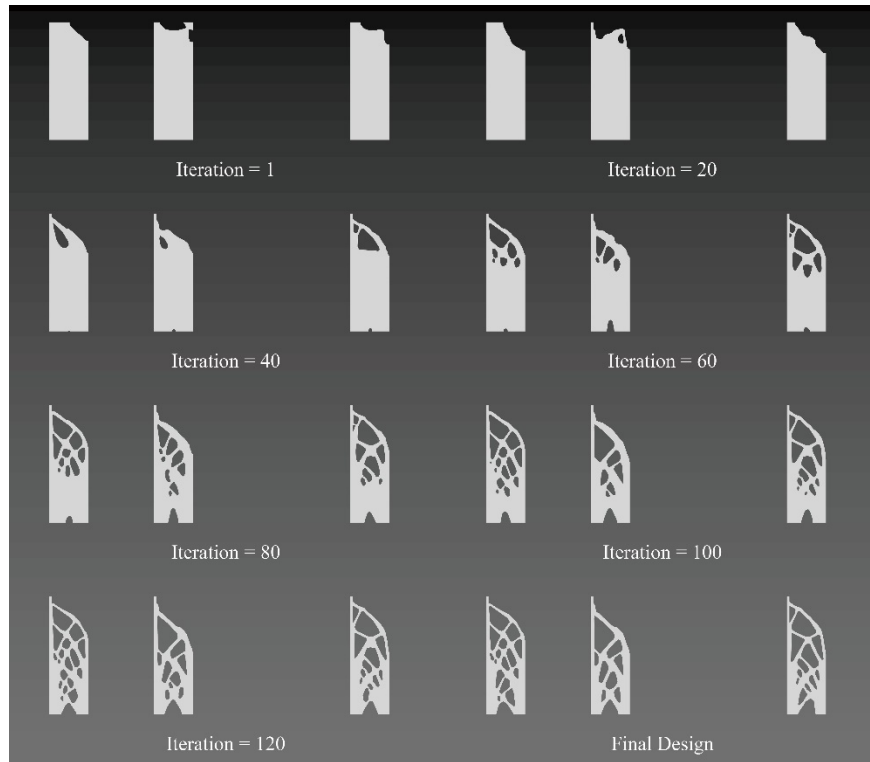


图 9 左侧边界非设计区算例中建筑群演化过程

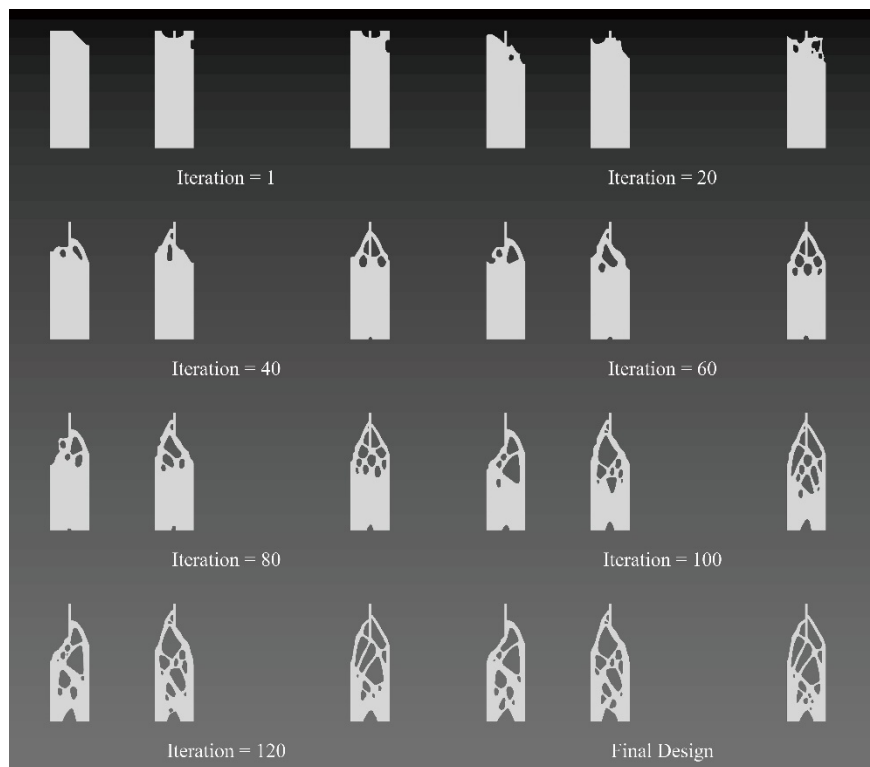


图 10 中央非设计区算例中建筑群演化过程

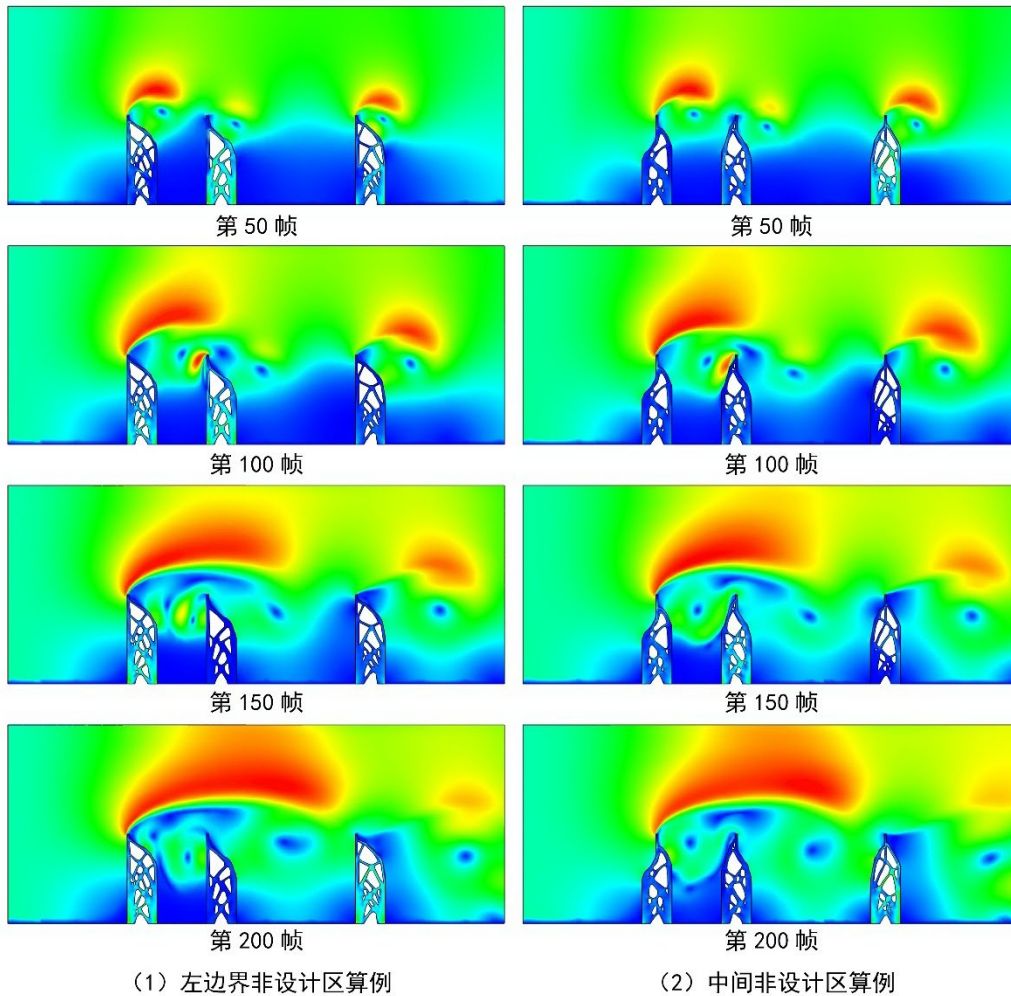


图 11 两个建筑群算例的流固耦合动态分析结果

结语

本研究提出了一种新的流固场耦合作用下的建筑群形态拓扑优化方法，它通过流固耦合技术将建筑环境的 CFD 模拟与建筑体的 FEA 模拟结合起来，并结合拓扑优化的算法逻辑实现了建筑群结构与风环境的协同优化。虽然本文仅以风环境与结构性能耦合作用为例，讨论了城市高层建筑单体和建筑群的形态优化问题，但不难看出基于流固场耦合作用的建筑群形态拓扑优化算法能够有效平衡建筑内部结构性能和外部流场性能的影响，在未来工作中具备适用于更加复杂的多物理场耦合和多建筑物交互的设计场景的潜力。

本算法框架嵌入的网格算法均包含了三维网格，虽然本算例中以高层建筑立面优化为例进行分析，但所有流固体模型实际都是三维模型，因此能够辅助建筑师在二维/三维空间中获得多样化的最佳单体建筑或建筑群的结构形态方案。其中需要指出的是，本方法所得到的建筑形态为建筑的主体结构 and 外轮廓形态，内部镂空部分作为使用空间或窗体区域还可以结合控制算法^[8]进行协同优化。同时，这些形态优化结果与传统的拓扑优化建筑找形算法得到的结果具有同构的特征，可以利用以往的制造和施工方式^[8,11,21-23]应用于实际工程。该方法旨在协调错综复杂的建筑环境下形式寻找过程中的各种物理要素，在建筑和城市设计领域的应用前景十分广阔。

参考文献

- [1] SCHEK H J. The force density method for form finding and computation of general networks[J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1974, 3(1): 115-134.
- [2] BARNES M R. Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation[J]. *International journal of space structures*, 1999, 14(2): 89-104.
- [3] BLOCK P. Thrust network analysis: exploring three-dimensional equilibrium[D]. Massachusetts Institute of Technology, 2009.
- [4] AKBARZADEH M. 3D graphical statics using reciprocal polyhedral diagrams[D]. ETH Zurich, 2016.
- [5] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1988, 71(2): 197-224.
- [6] BENDSØE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. *Archive of applied mechanics*, 1999, 69: 635-654.
- [7] HUANG X, XIE Y M, BURRY M C. Advantages of bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) over evolutionary structural optimization (ESO)[J]. *Advances in Structural Engineering*, 2007, 10(6): 727-737.
- [8] YAN X, BAO D, ZHOU Y, et al. Detail control strategies for topology optimization in architectural design and development[J]. *Frontiers of Architectural Research*, 2022, 11(2): 340-356.
- [9] YAN X, XIONG Y, BAO D W, et al. A Multi-volume constraint approach to diverse form designs from topology optimization[J]. *Engineering Structures*, 2023, 279: 115525.
- [10] YAN X, BAO D W, XIONG Y, et al. Structural topology optimisation based on a multi-agent model. *Engineering Structures*, 2023, 296: 116978.
- [11] 严鑫, 鲍鼎文. 基于拓扑优化及集群智能的计算设计与智能建造的分析和探索[J]. *建筑技艺*, 2022, 28(9): 60-63.
- [12] YUAN P F, SONG Y, LIN Y, et al. An architectural building cluster morphology generation method to perceive, derive, and form based on cyborg-physical wind tunnel (CPWT)[J]. *Building and Environment*, 2021, 203: 108045.
- [13] TOMINAGA Y, SHIRZADI M. Wind tunnel measurement of three-dimensional turbulent flow structures around a building group: Impact of high-rise buildings on pedestrian wind environment[J]. *Building and Environment*, 2021, 206: 108389.
- [14] 王力凯, 谭子龙, 吉国华. 面向应用的建筑风环境优化设计技术探索[J]. *动感: 生态城市与绿色建筑*, 2017 (1): 100-104.
- [15] 姚佳伟, 黄辰宇, 付斌, 等. 深度强化学习支持下风环境性能驱动的设计研究与实践[J]. *建筑学报*, 2022(S01): 8.
- [16] DONG Y, SUN C, HAN Y, et al. Intelligent optimization: A novel framework to automatize multi-objective optimization of building daylighting and energy performances[J]. *Journal of Building Engineering*, 2021, 43: 102804.
- [17] FENG Z, GU P, ZHENG M, et al. Environmental Data-Driven Performance-Based Topological Optimisation for Morphology Evolution of Artificial Taihu Stone[C]//The International Conference on Computational Design and Robotic Fabrication. Springer, Singapore, 2022.
- [18] LAZAROV B S, WANG F, SIGMUND O. Length scale and manufacturability in density-based topology optimization[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, 86(1-2): 189-218.
- [19] HUANG X, XIE Y M. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method - ScienceDirect[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, 43(14): 1039-1049.
- [20] KAZHDAN M. Poisson surface reconstruction[C]//Eurographics Symposium on Geometry Processing, 2006.
- [21] BAO D W, YAN X, & Xie Y M. Fabricating topologically optimized tree-like pavilions using large-scale robotic 3D printing techniques[J]. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 2022, 63(2): 122-131.
- [22] BAO D W, YAN X, SNOOKS R, et al. Design and Construction of an Innovative Pavilion Using Topological Optimization and Robotic Fabrication[C]//Proceedings of IASS Annual Symposia, 2019, 2019(5): 1-8.
- [23] BOYTER-GRANT K, XIN Z, BAO D W, et al. Weaving Tectonics: Algorithmically Optimised Robotic FRP Weaving of Large Scale Planar Forms [C]//Proceedings of CDRF 2023, Springer Singapore, 2023: 466-475.